МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО"

Завдання та методичні вказівки до вивчення окремих тем з курсу вищої математики

для студентів Інституту енергозбереження та енергоменеджменту

Рекомендовано Вченою радою ІЕЕ

Київ

НТУУ "КПІ імені Ігоря Сікорського"

2016

Завдання та методичні вказівки до вивчення окремих тем з курсу вищої математики.
Уклали: В.Ф.Зражевська, Т.В. Карнаухова. - К НТУУ “КПІ імені Ігоря Сікорського”, 2016. - 36 с.

Укладачі: **В.Ф. Зражевська**, канд.фіз-мат наук,доц

Т.В. Карнаухова, канд.фіз-мат наук,доц

Відповідальний редактор: **М.Є. Дудкін**, докт.фіз-мат наук,проф.

Рецензент: **О.В. Борисейко**, канд.фіз-мат наук,доц

За редакцією укладачів

ЗМІСТ

Вступ

Загальний курс математики є фундаментом успішного вивчення загальнотеоретичних та спеціальних дисциплін. Успішне оволідання цим курсом сприяє розвитку логічного мислення, дозволяє інженеру формалізувати проблему і знайти оптимальний шлях для її розв'язання. Запропоновані методичні вказівки ставять на меті полегшити вивчення деяких тем з курсу вищої математики, які можуть викликати певні труднощі у студентів. Методичні вказівки містять необхідні теоретичні відомості, розібрані приклади розв'язання типових задач, наведені завдання для самостійної роботи з відповідями. Методичні вказівки можут бути корисними студентам денної і заочної форм навчання.

1. Невласні інтеграли

Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де проміжок інтегрування $[a,b]$ скінченний, а підінтегральна функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, називають також власним інтегралом. Крім того, розглядають інтеграли від неперервної функції, але з нескінченним проміжком інтегрування (невласні інтеграли I роду), і визначені інтеграли зі скінченним проміжком інтегрування, але від функції, що має на цьому проміжку розриви (невласні інтеграли II роду).

1.1. Невласний інтеграл I роду.

Означення: Нехай $f(x)$ визначена і неперервна для всіх $x \in [a;+\infty)$. Тоді для всіх $A > a$ існує визначений інтеграл $\int_a^A f(x)dx$ і при зміні A він буде неперервною функцією A. Границя

$$\lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx \qquad (1)$$

називається **невласним інтегралом I роду** і позначається $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Отже, з означення випливає: $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_a^{A} f(x)dx$.

Якщо границя існує і скінченна, то кажуть, що невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ є **збіжним**. Якщо ж границя (1) не існує або нескінченна, то кажуть, що невласний інтеграл **розбігається**.

Аналогічно визначається невласний інтеграл на інтервалі $(-\infty;b]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{B\to-\infty}\int\limits_B^{b} f(x)dx,$$

і на інтервалі $(-\infty,\infty)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{B\to-\infty}\int\limits_B^{c} f(x)dx + \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_c^{A} f(x)dx, \qquad (2)$$

де c - довільне число. Інтеграл (2) буде збіжним, лише коли збігаються обидва інтеграли.

З означення невласного інтегралу I роду випливає метод його знаходження.

Приклад 1. *Обчислити інтеграл або встановити розбіжність:*

1) $\int\limits_5^{\infty}\dfrac{dx}{x^2-2x-5}$.

За означенням

$$\int\limits_5^{\infty}\frac{dx}{x^2-2x-3} = \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_5^{A}\frac{dx}{(x-1)^2-4} = \frac{1}{4}\lim\limits_{A\to+\infty}\ln\left|\frac{x-1-2}{x-1+2}\right|\Bigg|_5^{A} = \frac{1}{4}\lim\limits_{A\to+\infty}\ln\left|\frac{A-3}{A+1}\right| - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{3} =$$
$$= \frac{1}{4}\lim\limits_{A\to+\infty}\ln\left|1+\frac{-4}{A+1}\right| - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{3} = \frac{1}{4}\ln 3.$$

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{1+x^2}$.

За означенням

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{B\to-\infty}\int\limits_{B}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{0}^{A}\frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{B\to-\infty} arctg\, x\,\Big|_B^0 + \lim\limits_{A\to+\infty} arctg\, x\,\Big|_0^A =$$

$$= \lim_{B\to-\infty}\left(arctg\,0 - arctg\,B\right) + \lim_{A\to+\infty}\left(arctg\,A - arctg\,0\right) = -\lim_{B\to-\infty} arctg\,B + \lim_{A\to+\infty} arctg\,A = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

3) $\int\limits_0^{\infty} \sin x\,dx$.

За означенням:

$$\int\limits_0^{\infty} \sin x\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^{A} \sin x\,dx = \lim_{A\to+\infty}\left(-\cos x\right)\Big|_0^A = \lim_{A\to+\infty}\left(-\cos A + \cos 0\right) =$$

$= 1 - \lim\limits_{A\to+\infty}\cos A$ - інтеграл є розбіжним, оскільки при $A\to\infty$ $\lim\limits_{A\to+\infty}\cos A$ не існує.

4) $\int\limits_2^{\infty} \dfrac{dx}{x(3\ln x - 4)}$.

За означенням

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x(3\ln x - 4)} = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_2^{A} \frac{dx}{x(3\ln x - 4)} = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_2^{A} \frac{d\ln x}{(3\ln x - 4)} = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{3}\ln\left|3\ln x - 4\right|\Big|_2^A =$$

$\dfrac{1}{3}\lim\limits_{A\to+\infty}\ln\left|3\ln A - 4\right|$ - $-\dfrac{1}{3}\ln\left|3\ln 2 - 4\right| = \infty,$ оскільки при $A\to+\infty$ $\ln A\to+\infty.$ Отже, невласний інтеграл є розбіжним.

Приклад 2. *Дослідити на збіжність невласний інтеграл* $\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x^p}$ *в залежності від значення параметра p.*

Нехай $p = 1$. За означенням: $\int\limits_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to+\infty}\left|\ln x\right|\Big|_2^A = \lim\limits_{A\to+\infty}\ln A - \ln 2 = +\infty.$ Отже, в цьому випадку невласний інтеграл є розбіжним.

Нехай тепер $p \neq 1$.

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{A\to+\infty}.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_2^A = \lim_{A\to\infty}.\frac{A^{-p+1}}{-p+1} - \frac{2^{-p+1}}{-p+1} = \left[\begin{array}{l}\infty,\ p<1\\ \dfrac{2^{-p+1}}{p-1},\ p>1.\end{array}\right.$$

Таким чином, інтеграл є розбіжним при $p \le 1$ і збіжним при $p > 1$.

Приклад 3. *Дослідити на збіжність невласний інтеграл* $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^{p}x}$ *в залежності від значення параметра* p.

Нехай $p=1$. За означенням

$\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln\ x}=\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_{2}^{A}\frac{dx}{x\ln x}=\lim\limits_{A\to\infty}\ln\left|\ln x\right|\Big|_{2}^{A}=\lim\limits_{A\to\infty}\ln\ln A-\ln\ln 2=\infty.$ Отже, в цьому випадку невласний інтеграл є розбіжним.

Нехай тепер $p\neq 1$.

$$\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^{p}x}=\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{2}^{A}\frac{d\ln x}{\ln^{p}x}=\lim\limits_{A\to+\infty}.\frac{\ln^{-p+1}x}{-p+1}\Big|_{2}^{A}=\lim\limits_{A\to+\infty}.\frac{(\ln A)^{-p+1}}{-p+1}-\frac{(\ln 2)^{-p+1}}{-p+1}=\left[\begin{array}{l}\infty,p<1\\ \dfrac{(\ln 2)^{-p+1}}{p-1},p>1.\end{array}\right.$$

Таким чином, інтеграл є розбіжним при $p\leq 1$ і збіжним при $p>1$.

Приклади для самостійної роботи.

Обчислити або встановити розбіжність невласних інтегралів:

1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2xdx}{1+x^{2}},$ (Відповідь: розбіжний)
2. $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{\ln^{3}xdx}{x},$(Відповідь: розбіжний)
3. $\int\limits_{0}^{\infty}xe^{-x^{2}}dx,$ (Відповідь: $\frac{1}{2}$).
4. $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\sqrt{x}}dx,$ (Відповідь: 2).
5. $\int\limits_{0}^{\infty}x^{3}e^{-x^{2}}dx,$ (Відповідь: $\frac{1}{2}$).
6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^{2}+2x+2},$ (Відповідь: π).
7. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{2}(x+1)},$(Відповідь: $1-\ln 2$).
8. $\int\limits_{0}^{\infty}x\sin xdx,$ (Відповідь: розбіжний).

9. $\int\limits_1^{\infty}\frac{arctgxdx}{x^2}$, (Відповідь: $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$).

10. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, (Відповідь: $\ln(\sqrt{2}+1)$).

Провести дослідження інтегралу на збіжність, не знаходячи його значення, можна за допомогою ознак збіжності невласних інтегралів I роду. Сформулюємо їх без доведення у вигляді теорем.

Теорема 1. (Перша ознака порівняння для невласних інтегралів I роду). Якщо на проміжку $[a,+\infty)$ неперервні функції $f(x)$ і $g(x)$ задовольняють умову $0\le f(x)\le g(x)$, то із збіжності інтегралу $\int\limits_a^{\infty}g(x)dx,$ випливає збіжність інтегралу $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx,$ а з розбіжності інтегралу $\int\limits_a^{\infty}f(x)dx,$ випливає розбіжність інтегралу $\int\limits_a^{\infty}g(x)dx.$

Зауважимо, що в якості функцій для порівняння часто вибирають функції виду $\frac{1}{x^p}$, оскільки поведінка інтегралу $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x^p}$ в залежності від p відома (див приклад 2).

Приклад 4. *Дослідити на збіжність невласні інтеграли I роду*

1. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+3e^x+2}.$

Оскільки виконуються нерівності $3e^x+2>0,\quad x^3+3e^x+2>x^3$ для всіх $x\in[1,+\infty)$, то має місце оцінка: $0<\frac{1}{x^3+3e^x+2}<\frac{1}{x^3}.$ Інтеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^3}$ є збіжним ($p=3>1$), а, отже, за першою ознакою порівняння і наш інтеграл є збіжним.

2. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{(x+e^x)}{\sqrt{x^3}}dx.$

При $x\ge 1$ має місце оцінка:

$$\frac{x+e^x}{\sqrt{x^3}} \ge \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}} > 0.$$

Інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ є розбіжним ($p = 1/2$), а значить і наш інтеграл розбіжний.

3. $\int_2^{+\infty} \frac{xdx}{x^3 + 2\cos x + 3}$.

Оскільки $2\cos x + 3 \ge 1$для всіх x, то при всіх $x \ge 2$ маємо:

$$0 < \frac{x}{x^3 + 2\cos x + 3} \le \frac{x}{x^3 + 1} < \frac{1}{x^2}.$$

Інтеграл $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ є збіжним ($p = 2$),а значить і наш інтеграл збіжний.

4. $\int_2^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^3 - 2\cos x - 3}$.

Оскільки $2\cos x + 3 \ge 1$для всіх x, то при всіх $x \ge 2$ маємо

$$0 < \frac{x}{x^3 + 2\cos x + 3} \le \frac{x}{x^3 + 1} < \frac{1}{x^2}.$$

Інтеграл $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ є збіжним ($p = 2$), а значить і наш інтеграл збіжний.

5. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x dx}{(x^2 + 1)^4}$.

Скористаємось відомою оцінкою: $\ln x < x$ для всіх $x \ge 2$. Отже, при $x \ge 2$ виконується нерівність: $0 < \frac{\ln x}{(x^2+1)^4} < \frac{x}{(x^2+1)^4} < \frac{x}{(x^2)^4} = \frac{1}{x^7}$. Інтеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^7}$ збіжний ($p = 7$), а, значить і наш інтеграл збіжний.

6. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Оскільки функція $y = \ln x$ монотонно зростає, то для всіх $x \ge 2$ виконується оцінка $\ln x \ge \ln 2$. Отже, $\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \ge \frac{\ln 2}{\sqrt[3]{x}} > 0$. Інтеграл $\int_2^{+\infty} \frac{\ln 2 dx}{\sqrt[3]{x}} = \ln 2 \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ є розбіжним $(p = 1/3)$, тому і наш інтеграл є розбіжним.

7. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2(x+3)}$.

Функція $y = \ln x$ монотонно зростаюча функція. Отже, для $x \ge 2$: $\ln(x+3) > \ln x$, і виконується оцінка: $0 < \frac{1}{x\ln^2(x+3)} < \frac{1}{x\ln^2 x}$. В силу приклада 3, $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ є збіжним $(p = 2)$, тому і наш інтеграл є збіжним.

8. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln(x+3)}$.

Оскільки має місце оцінка при $x \ge 3$: $\frac{1}{x\ln(x+3)} > \frac{1}{(x+3)\ln(x+3)} > 0$, і $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+3)\ln(x+3)}$ є розбіжним $\left(\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+3)\ln(x+3)} = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_2^{A} \frac{d\ln(x+3)}{\ln(x+3)} = \lim\limits_{A\to+\infty} \left(\ln\ln(\mathrm{A}+3) - \ln\ln 5\right) = +\infty \right)$, то і наш інтеграл є розбіжним.

Підкреслимо, що в усіх розглянутих прикладах підінтегральні функції і функції, вибрані для порівняння, задовольняють умовам Теореми 1.

Теорема 2. (Друга або гранична ознака порівняння для невласних інтегралів I роду). Якщо існує границя $\lim\limits_{A\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k, 0 < k < \infty,\ (\mathrm{f}(x) > 0, \varphi(x) > 0)$, то інтеграли $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ і $\int\limits_a^{\infty} \varphi(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Приклад 5. *Дослідити на збіжність невласні інтеграли I роду.*

1. $\int\limits_1^{\infty} \frac{x^2}{x^7 + 5x^2 + 6x + 3} \mathrm{d}x$.

Інтеграл є збіжним, оскільки збіжним є інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^5}$ $(p = 5)$ і

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x^2}{x^7 + 5x^2 + 6x + 3}}{1/x^5} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^5 x^2}{x^7 + 5x^2 + 6x + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{5}{x^5} + \frac{6}{x^6} + \frac{3}{x^7}} = 1.$$

2. $\int\limits_1^{\infty} \ln\left(\frac{x^3+3}{x^3+2}\right) \mathrm{d}x$.

Скористаємось таблицею еквівалентних величин

$\ln\left(\frac{x^3+3}{x^3+2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^3+2}\right) \sim \frac{1}{x^3+2}$ при $x \to \infty$, оскільки $\frac{1}{x^3+2} \to 0$ при $x \to \infty$.

Порівняємо наш інтеграл з інтегралом $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$, який є збіжним:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{x^3+3}{x^3+2}\right)}{\dfrac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x^3+2}}{\dfrac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{2}{x^3}}=1$$. Отже, і наш інтеграл є збіжним.

3. $\int_2^{\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{x}}{x+3}\,\mathrm{d}\,x$.

Скористаємось таблицею еквівалентних величин: $\sin^2\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x^2}$ при $x\to\infty$.

Порівнюємо зі збіжним інтегралом $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^3}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\sin^2\frac{1}{x}}{x+3}}{\dfrac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\sin^2\frac{1}{x}}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2(x+3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{3}{x}}=1 .$$

Таким чином, інтеграл є збіжним.

4. $\int_2^{\infty}\sqrt{x}(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)\,\mathrm{d}\,x$.

Скористаємось таблицею еквівалентних величин $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\sim\frac{1}{x}$ при $x\to\infty$ і

порівняємо із розбіжним інтегралом $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\sqrt{x}}{x}=1$$. Таким чином, інтеграл є розбіжним.

Приклади для самостійної роботи.

Дослідити на збіжність невласні інтеграли I роду:

1. $\int_2^{\infty}\frac{\sin x+2}{x^2+3x+1}dx$ (Відповідь: збіжний).

2. $\int_2^{\infty}\frac{\sin x+2}{3x+1}dx$ (Відповідь: розбіжний).

3. $\int_2^{\infty}\frac{1-cos\frac{1}{x}}{x^2+4}dx$ (Відповідь: збіжний).

4. $\int_4^{\infty}\ln\left(\frac{x+4}{x+2}\right)\mathrm{d}\,x$ (Відповідь: розбіжний).

5. $\int_2^{\infty}\frac{x}{(\sqrt{x}+1)^4}dx$ (Відповідь: розбіжний).

6. $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{(\sqrt{x}+1)^4}$ (Відповідь: збіжний).

7. $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ (Відповідь: збіжний).

8. $\int\limits_2^{\infty}\frac{\ln x dx}{4x^3+5x+1}$ (Відповідь: збіжний).

9. $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x+2\ln x}$ (Відповідь: розбіжний).

10. $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{(2x+1)\ln(3x+1)}$ (Відповідь: розбіжний).

1.2 Невласний інтеграл другого роду

Означення. Нехай $f(x)$ неперервна на проміжку $(a,b]$ і має нескінченний розрив при $x=a$. Границя $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ називається **невласним інтегралом II роду** і позначається $\int\limits_a^b f(x)dx$.Отже, за означенням,

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \ . \tag{3}$$

Якщо границя в правій частині (3) існує і скінченна, то невласний інтеграл II роду називається **збіжним,** в іншому випадку – **розбіжним**.
Аналогічно, якщо функція $f(x)$ має нескінченний розрив при $x=b$, невласний інтеграл визначається як

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx \ . \tag{4}$$

Якщо ж $f(x)$ має розрив у внутрішній точці $c\in(\mathrm{a},\mathrm{b})$, то невласний інтеграл визначається як

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim_{\eta\to+0}\int\limits_{c+\eta}^{b} f(x)dx \ . \tag{5}$$

Причому, невласний інтеграл вважається збіжним, якщо обидві границі в правій частині скінченні.

Приклад 6. *Обчислити невласний інтеграл II роду або встановити його розбіжність:*

1. $\int\limits_0^1 \frac{x^3+2x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$.

При $x=0$ підінтегральна функція має нескінченний розрив. За означенням (3)

$$\int\limits_0^1 \frac{x^3+2x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 \left(x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{1} =$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{2}{7}+\frac{4}{3}+2-\frac{2}{7}\varepsilon^{\frac{7}{2}}-\frac{4}{3}\varepsilon^{\frac{3}{2}}-2\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{76}{21}.$$ Інтеграл є збіжним.

2. $\int\limits_{1.5}^2 \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

Підінтегральна функція $\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-1)(x-2)}$ має нескінченний розрив на проміжку $[1.5;2]$ в точці $x=2$. Отже, за (4) маємо:

$$\int\limits_{1.5}^2 \frac{dx}{x^2-3x+2} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{1.5}^{2-\varepsilon}\frac{1}{(x-1)(x-2)}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{1.5}^{2-\varepsilon}\left(-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right)dx =$$

$=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right)\Bigg|_{1.5}^{2-\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}(\ln\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}-\ln 1)=-\infty$ (врахували, що $\ln(+0)\to-\infty$). Таким чином, інтеграл розбіжний.

3. $\int\limits_{-1}^2 \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{e^x-1}}$.

Функція $\frac{e^x}{\sqrt[3]{e^x-1}}$ має на $[-1,2]$ нескінченний розрив в точці $x=0$. Тому за (5):

$$\int\limits_{-1}^2 \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{e^x-1}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{e^x dx}{\sqrt[3]{e^x-1}} + \lim_{\eta\to+0}\int\limits_{0+\eta}^{2}\frac{e^x dx}{\sqrt[3]{e^x-1}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\mathrm{e}^x-1)^2}\Big|_{-1}^{0-\varepsilon}\right)+$$

$$+\lim_{\eta\to+0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\mathrm{e}^x-1)^2}\Big|_{0+\eta}^{2}\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\mathrm{e}^{-\varepsilon}-1)^2}\right)-\lim_{\eta\to+0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\mathrm{e}^{\eta}-1)^2}\right)+\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\mathrm{e}^2-1)^2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\mathrm{e}^{-1}-1)^2}=$$

$\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\mathrm{e}^2-1)^2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\mathrm{e}^{-1}-1)^2}$. Інтеграл є збіжним.

Приклад 7. *Дослідити на збіжність невласний інтеграл* $\int\limits_a^b \frac{dx}{(\mathrm{x}-a)^p}$, $a<b$ *в залежності від значення параметру p.*

Підінтегральна функція має розрив в точці $x=a$.

Нехай $p=1$.

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln|x-a|\Big\|_{a+\varepsilon}^b = \lim_{\varepsilon\to+0}(\ln(b-a)-\ln\varepsilon) = +\infty$$ - інтеграл розбіжний.

Нехай $p \neq 1$.

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left.\frac{(x-a)^{-p+1}}{1-p}\right|_{a+\varepsilon}^b = \frac{1}{1-p}\lim_{\varepsilon\to+0}\left((b-a)^{-p+1}-\varepsilon^{-p+1}\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \infty, p>1 \\ \dfrac{(b-a)^{-p+1}}{p-1}, p<1. \end{array}\right.$$

Таким чином, інтеграл є розбіжним при $p \geq 1$ і збіжним при $p<1$.

Як і для невласних інтегралів I роду, для дослідження на збіжність невласних інтегралів II роду використовують ознаки порівняння.

Теорема 3. (Перша ознака порівняння для невласних іниенралів II роду). Якщо на проміжку $(a,b]$ неперервні функції $f(x)$ і $g(x)$ задовольняють умову $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то із збіжності інтегралу $\int_a^b g(x)dx,$ випливає збіжність інтегралу $\int_a^b f(x)dx,$ а з розбіжності інтегралу $\int_a^\infty f(x)dx,$ випливає розбіжність інтегралу $\int_a^\infty g(x)dx.$

Теорема 4. (Друга або гранична ознака порівняння для невласних інтегралів II роду). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на проміжку $(a,b]$ і в точці $x=a$ мають нескінченний розрив. Якщо існує скінченна і відмінна від 0 границя $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{\mathrm{g}(x)}=k,$ то інтеграли $\int_a^b f(x)dx$ і $\int_a^b \mathrm{g}(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

В якості функцій для порівняння часто вибирають функції виду $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$, оскільки поведінка цього інтегралу в залежності від p відома (див приклад 7).

Аналогічні теореми можуть бути сформульовані і у випаду, коли функції неперервні на проміжку $[a,b)$ і мають нескінченний розрив в точці $x=b$.

Приклад 8. *Дослідити на збіжність невласні інтеграли*

1. $\int_1^2 \frac{3+2\cos x}{x-1}dx$.

Для будь-яких x $3+2\cos x \ge 1$. Тому для всіх $x \in (1,2]$ виконується нерівність: $\frac{3+2\cos x}{x-1} > \frac{1}{x-1} > 0$. Оскільки функція $\frac{1}{x-1}$, так само, як і функція $\frac{3+2\cos x}{x-1}$, має нескінченний розрив в точці $x=1$ і інтеграл $\int_1^2 \frac{1}{x-1}dx$ є розбіжним ($p=1$), то і наш інтеграл розбігається за І ознакою порівняння.

2. $\int_1^2 \frac{3+2\cos x}{\sqrt{x-1}}dx$.

Для будь-яких x $3+2\cos x \le 5$. Тому для всіх $x \in (1,2]$: $0 < \frac{3+2\cos x}{\sqrt{x-1}} < \frac{5}{\sqrt{x-1}}$. Оскільки функція $g(x) = \frac{5}{\sqrt{x-1}}$ має розрив в точці $x=1$ і інтеграл $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$ є збіжним ($p=1/2<1$), то за І ознакою порівняння наш інтеграл є збіжним..

3. $\int_0^1 \frac{dx}{1-\cos x}$.

Функція $\frac{1}{1-\cos x}$ має на $[0,1]$ єдиний нескінченний розрив в точці $x=0$. Розглянемо функцію $g(x) = \frac{1}{x^2}$, яка також на $[0,1]$ має єдиний розрив в точці $x=0$. За граничною ознакою порівняння $\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{\mathrm{g}(x)} = \lim_{x\to+0}\frac{x^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to+0}\frac{x^2}{x^2/2} = 2(\ne 0, \ne \infty)$, і оскільки $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ за прикладом 7 є розбіжним, то і наш інтеграл є розбіжним. При підрахунку границі скористалися таблицею еквівалентних величин: $1-\cos x \sim x^2/2, x\to 0$.

4. $\int_0^1 \frac{\ln(x+2)dx}{e^x-1}$.

Функція $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{e^x-1}$ має нескінченний розрив при $x=0$. Скористаємося І ознакою порівняння і порівняємо з $\mathrm{g}(x) = \frac{\ln 2}{e^x-1}$. Оскільки функція $\mathrm{y} = \ln(x+2)$ монотонно зростаюча, то для всіх $x\in[0,1]$ виконується оцінка $\ln(x+2) \ge \ln 2$. Отже, $\frac{\ln(x+2)}{e^x-1} \ge \frac{\ln 2}{e^x-1} > 0$. Для дослідження інтегралу $\int_0^1 \frac{\ln 2 dx}{e^x-1}$ скористаємося ІІ ознакою порівняння. Для цього розглянемо розбіжний інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x}$, який також має нескінченний розрив в точці $x=0$. Оскільки

$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln 2/(\mathrm{e}^x-1)}{1/x}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x\ln 2}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x\ln 2}{x}=\ln 2,(\neq 0,\neq\infty)$, то за II ознакою порівняння $\int\limits_0^1\dfrac{\ln 2dx}{e^x-1}$ є розбіжним, а отже за I ознакою порівняння і $\int\limits_0^1\dfrac{\ln(x+2)dx}{e^x-1}$ є розбіжним. Зауважимо, що при підрахунку границі скористалися таблицею еквівалентних величин $e^x-1\sim x, x\to 0$.

Приклади для самостійної роботи.

Обчислити або встановити розбіжність невласних інтегралів II роду:

1. $\int\limits_0^{1/2}\dfrac{dx}{x\ln^2 x}$ (Відповідь: $\dfrac{1}{\ln 2}$)
2. $\int\limits_1^2\dfrac{dx}{\ln x}$ (Відповідь: розбіжний).
3. $\int\limits_{-1}^1\dfrac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx$ (Відповідь: $\dfrac{10}{7}$).
4. $\int\limits_0^{\pi}\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ (Відповідь: розбіжний).
5. $\int\limits_2^3\dfrac{dx}{x^2-4x+3}$ (Відповідь: розбіжний).
6. $\int\limits_1^3\dfrac{e^x}{(x-3)^3}dx$ (Відповідь: розбіжний).
7. $\int\limits_0^1\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ (Відповідь: $2e-2$.
8. $\int\limits_0^{\pi/4}\dfrac{1+\sin x}{x\sqrt{x}}dx$ (Відповідь: розбіжний).
9. $\int\limits_0^2\dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ (Відповідь: 6).
10. $\int\limits_0^{\pi/4}\dfrac{dx}{\sin x}$ (Відповідь: розбіжний).

2. Інтегрування диференціального бінома

Означення: Інтеграл виду $\int x^m(\mathrm{a}+\mathrm{b}x^n)^p dx$, де a,b - дійсні числа, m,n,p - раціональні числа, називаються **інтегралами від диференціального біному**.

Російським математиком Чебишевим П.А. було доведено, що інтеграли цього типу виражаються через відомі елементарні функції лише в трьох випадках. Розглянемо ці випадки і заміни, які використовуються при інтегруванні.

I. Якщо p ціле число, то треба зробити заміну $x=t^k$, де k - найменьше спільне кратне знаменників дробів m,n.

Приклад 1. *Знайти інтеграл* $\int \sqrt[3]{x}(1+\sqrt{x})^2 dx$.

Перепишемо інтеграл у вигляді $\int x^{1/3}(1+x^{1/2})^2 dx$. Отже, в нашому випадку, $m=1/3, n=1/2, p=2$. Робимо заміну $x=t^6$, бо $HCK(2,3)=6$. Тоді $dx=6t^5dt$, $t=\sqrt[6]{x}$:

$$\int x^{1/3}(1+x^{1/2})^2 dx=\int (t^6)^{1/3}(1+(t^6)^{1/2})^2 6t^5dt= \ 6\int \mathrm{t}^2(1+t^3)^2 t^5dt=6\int (\mathrm{t}^7+2t^{10}+t^{13})dt=$$

$$=6\frac{t^8}{8}+12\frac{t^{11}}{11}+6\frac{t^{14}}{14}+C=\frac{3}{4}x^{4/3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+\frac{3}{7}x^{7/3}+C .$$

II. Якщо p дробове число, а $\frac{m+1}{n}$ - ціле, то робимо підстановку $a+bx^n=t^k$, де k - знаменник дробу p .

Приклад 2. *Знайти інтеграл* $\int \frac{\sqrt[4]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}dx$.

Запишемо інтеграл у вигляді $\int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{1/4}dx$. Отже, в нашому випадку, $m=-1/2, n=1/4, p=1/4$. Оскільки $\frac{m+1}{n}=2$ - ціле число, робимо заміну $1+x^{1/4}=t^4$. Тоді $x=(t^4-1)^4$, $dx=4(t^4-1)^3 4t^3dt$, $t=\sqrt[4]{1+\sqrt[4]{x}}$:

$$\int \frac{\sqrt[4]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}dx=\int \frac{1}{(t^4-1)^2}t\cdot 16\cdot t^3(t^4-1)^3dt=16\int (t^4-1)t^4dt=16(\frac{t^9}{9}-\frac{t^5}{5})+C=$$

$$=\frac{16}{9}\sqrt[4]{(1+\sqrt[4]{x})^9}-\frac{16}{5}\sqrt[4]{(1+\sqrt[4]{x})^5}+C .$$

III. Якщо p дробове число, $\frac{m+1}{n}$ -дробове, а $\frac{m+1}{n}+p$ - ціле, то робимо підстановку $ax^{-n}+b=t^k$, де k - знаменник дробу p .

Приклад 3. *Знайти інтеграл* $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$.

Записуємо інтеграл у вигляді $\int x^{-7/4}(1+x^{1/2})^{1/2}dx$ і знаходимо $m=-7/4, n=1/2, p=1/2$. Оскільки $\frac{m+1}{n}+p=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-1$ - ціле число, робимо заміну $1+x^{-1/2}=t^2$. Тоді $x=(t^2-1)^{-2}$, $dx=-2(t^2-1)^{-3}2tdt$, $t=\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$:

$$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx=\int (t^2-1)^{\frac{7}{2}}\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)^{1/2}(-4t)\left(t^2-1\right)^{-3}dt=-4\int (t^2-1)^{\frac{7}{2}}\frac{(t^2-1+1)^{1/2}}{(t^2-1)^{1/2}}t\left(t^2-1\right)^{-3}dt=$$

$$=-4\int t^2dt=-4\frac{t^3}{3}+C=-\frac{4}{3}\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3}+C.$$

Приклади для самостійної роботи.

Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^3}+1}}{x^2}dx$ (Відповідь: $-\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^4}+C$).

2. $\int \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^3}+1}}{\sqrt{x}}dx$ (Відповідь: $\frac{4}{7}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)^7}-\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)^4}+C$).

3. $\int \sqrt[4]{x}(1+\sqrt[3]{x})^2dx$ (Відповідь: $\frac{4}{5}x^{5/4}+\frac{24}{19}x^{19/12}+\frac{12}{23}x^{23/12}+C$).

4. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}}dx$ (Відповідь: $-\frac{2}{3}\sqrt{\left(1/x+1\right)^3}+C$).

5. $\int \sqrt{x}(1+\sqrt{x^3})^{1/2}dx$ (Відповідь: $\frac{4}{9}\sqrt{\left(1+\sqrt{x^3}\right)^3}+C$).

6. $\int \frac{\sqrt[5]{\left(\sqrt{x}+1\right)^4}}{x\sqrt[10]{x^9}}dx$ (Відповідь: $--\frac{10}{9}\sqrt[5]{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)^9}+C$) .

3. Деякі задачі геометричного та фізичного змісту, які зводяться до диференціальних рівнянь

3.1 Задачі геометричного змісту.

При розв'язання багатьох задач геометричного змісту використовується тот факт, що кутовий коефіцієнт дотичної $\kappa_{дот}$ до кривої $y = y(x)$ в точці $(x_{0,} y_0)$ дорівнює значенню похідної в точці дотику: $\kappa_{дот} = y'(x)$.Тоді кутовий коефіцієнт нормалі $\kappa_{норм}$, як прямої, що перпендикулярна дотичній, $\kappa_{норм} = -1\big/ y'(x)$.

Приклад 1. *Знайти рівння кривих, для яких кутовий коефіцієнт дотичної до кривої в будь-який точці дорівнює сумі абсциси і ординати точки дотику.*

Нехай $y = y(x)$ рівняння шуканої кривої. За умовою в будь-якій точці кривої (x, y) повинна виконуватись рівність $\kappa_{дот} = x + y$. Отже, маємо диференціальне рівняння першого порядку $y'(x) = x + y$, якому повинні задоволняти всі точки кривої.

Шукаємо загальний розв'язок цього рівняння. Маємо лінійне диференціальне рівняння. Його розв'язок знаходимо за методом Бернулі у вигляді: $y(x) = u(x)v(x)$. Тоді $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ і рівняння набуває вигляду: $u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u(x)v(x) = x$, або $u'(x)v(x) + u(x)(v'(x) - v(x)) = x$.

Перепишемо рівняння у вигляді ситеми двох рівнянь для функцій $u(x), v(x)$:

$$\begin{cases} u(x)(v'(x) - v(x)) = 0 \\ u'(x)v(x) = x \end{cases}$$

Оскільки $u(x) \neq 0$, то для знаходження функції $v(x)$ з першого рівняння маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними: $\dfrac{dv}{dx} = v,\quad \dfrac{dv}{v} = dx,$ $\ln v = x + C$. Покладаючи $C = 0$, отримуємо $v = e^x$. Тоді з другого рівняння системи для функції $u(x)$ також маємо диференціальне рівненя з відокремлюваними змінними $\frac{du}{dx}e^{x} = x, du = xe^{-x}dx$. Взявши інтеграл $\int xe^{-x}dx$ частинами, маємо загальний розв'язок у вигляді $u = -xe^{-x} - e^{-x} + C$. Отже, шукане сімейство ліній має вигляд $y = (-xe^{-x} - e^{-x} + C)e^{x} = -x - 1 + Ce^{x}$.

В більш складних задачах треба знайти криві, дотичні або нормалі яких мають певні властивості. Існують різні підходи для знаходження таких кривих. Пропонуємо наступний алгоритм розв'язання таких задач.

1.Складаємо рівняння дотичної (або нормалі) до кривої $y = y(x)$ в довільній точці кривої $(x.y)$

$Y - y = y'(x)(X - x)$, де (X,Y) - довільна точка на дотичній, (6)

($Y - y = -\frac{1}{y'(x)}(X - x)$, де (X,Y) - довільна точка на нормалі) (7)

2.Беремо деяку точку $M(X,Y)$ на дотичній (нормалі) і її координати виражаємо з умови через координати точки дотику (x, y).

3.Оскільки точка $M(X,Y)$ лежить на дотичній (нормалі), то її координати мають задовольняти рівняння дотичної (нормалі). Отже, підставляючи координати точки $M(X,Y)$ в рівняння дотичної (нормалі) замість X,Y, отримуємо диференціальне рівняння відносно шуканої функції $y(x)$.

Приклад 2. *Знайти рівняння кривої, що проходить через точку (1,1) і для якої точка перетину довільної дотичної з віссю абсцис має абсцису в два рази меншу за абсцису точки дотику*.

Спочатку знайдемо всі лінії, що мають вказану властивість. Розглядаємо точку перетину дотичної з віссю абсцис $M(X,0)$ (Рис.1).

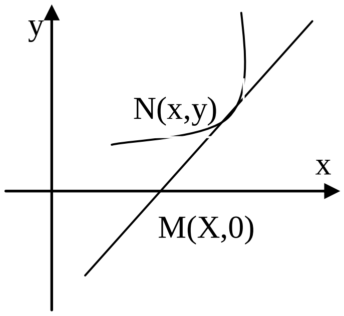

Рис.1

За умовою X в два рази менше за абсцису точки дотику x: $\frac{x}{2} = X$. Підставляємо координати точки $M(\frac{x}{2},0)$ в рівняння дотичної (6): $0 - y = y'(x)(\frac{x}{2} - x)$, або $y'x = 2y$. Отримали диференціальлне рівняння з відокремлюваними змінними. Знаходимо його загальний розв’язок:

$$\frac{dy}{dx}x = 2y,\ \frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx,\ \ln y = 2\ln x + \ln C,\ \ln y = \ln x^2 + \ln C,\ \ln y = \ln Cx^2,\ \ y = Cx^2.$$

Ми знайшли множину ліній, що мають вказану властивість. Щоб знайти лінію, що проходить через точку (-1,1), шукаємо сталу С з умови $y(-1) = 1$: $1 = C.$ Отже, наша лінія $y(x) = x^2.$

Приклад 3. *Знайти рівняння кривих, для яких точка перетину довільної дотичної з віссю OX однаково віддалена від точки дотику і від початку координат.*

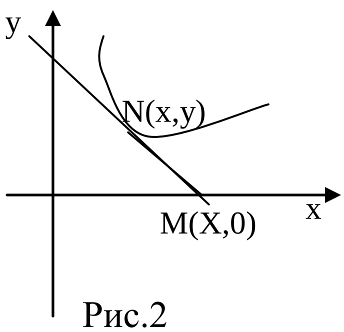

Рис.2

Розглядаємо точку на дотичній $M(X,0)$ (Рис.2). Відстань від точки $M(X,0)$ до точки дотику (x, y) знаходиться за формуою $\sqrt{(x-X)^2 + y^2}$.Отже, за умовою $\sqrt{(x-X)^2 + y^2} = X.$ З отриманої рівності виражаємо X: $X = \dfrac{x^2 + y^2}{2x}.$ Підставляємо координати точки $M(\dfrac{x^2 + y^2}{2x},0)$ в рівняння дотичної $-y = y'(\dfrac{x^2 + y^2}{2x} - x).$ Звідки отримуємо диференціальне рівняння: $2xy = (x^2 - y^2)y'.$ Маємо диференціальне рівняння першого порядку, однорідне відносно змінних. Заміною $y = xu(x),$ зводимо його до рівняння з відокремлюванимим змінними для функції $u(x)$:

$$2x^2u = (x^2 - x^2u^2)(u + xu'),\qquad 2u - (1-u^2)u = (1-u^2)xu',\qquad u + u^3 = (1-u^2)x\frac{du}{dx},$$

$$\frac{1-u^2}{u+u^3}du = \frac{dx}{x}.$$

Після інтегрування отримуємо:

$$\ln|u| - \ln(u^2+1) = \ln|x| + \ln|C|,\quad \ln\left|\frac{u}{u^2+1}\right| = \ln|Cx|,\ \ \frac{u}{u^2+1} = Cx.$$

Повертаючись до функції $y(x)$, $u(x) = \dfrac{y}{x}$, остаточно маємо: $y = C(y^2 + x^2).$

Приклад 4. *Знайти рівнянняткривої, що проходить через точку (1,3), якщо відрізок довільної дотичної між осями координат ділиться в точці дотику у відношенні 2:1, рахуючи від осі OY.*

Зробимо схематичний малюнок (Рис.3).

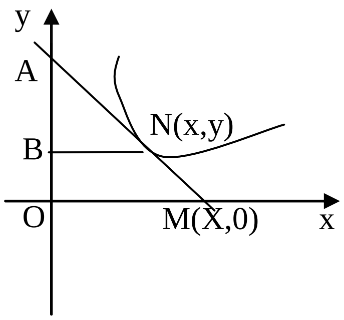

Рис.3

Нехай точка дотику $N(x,y)$, точка на дотичній $M(X,0)$. З подібності трикутників ABN і AOM по двом кутам випливає співвідношення: $AN:AM = BN:OM$. За умовою точки $M(3/2\, x,0)$. Підставляючи координати точки M в рівняння дотичної, отримуємо диференціальне рівняння

першого порядку: $-y = y'(\frac{3}{2}x - x),$ або $-y = \frac{1}{2}xy'.$

Маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Знаходимо його загальний розв'язок:

$$-y = \frac{1}{2}x\frac{dy}{dx},\ \ \frac{dy}{y} = -2\frac{dx}{x},\ \ \ln y = -2\ln x + \ln C,\ \ \ln y = \ln\frac{C}{x^2}.\ \ y = \frac{C}{x^2}.$$

З отриманої множини кривих вибираємо ту, що проходить через точку (1,3). Для цього в отриманий загальний розв'язок замість x підставляємо 1 а замість y -3: $3 = \frac{C}{1^2},\ C = 3.$ Отже, наша крива має рівняння $y = \frac{3}{x^2}$.

Приклад 5. *Знайти рівняння кривої, що проходить через точку (2,2) і для якої ордината точки перетину нормалі з віссю ординат дорівнює добутку координат точки дотику*.

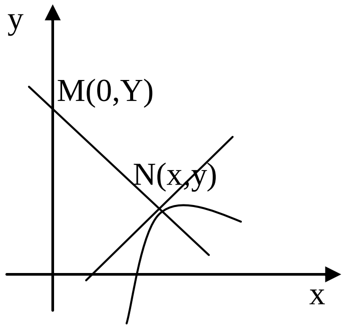

Рис. 4

Розглядаємо точку пертину нормалі з віссю ординат – точку $M(0,Y)$ (Рис. 4).

За умовою $Y = xy$, де (x,y) – точка дотику. Підставляємо координати точки $M(0,xy)$ в рівняння нормалі: $xy - y = -\frac{1}{y'(x)}(0 - x),$ або $(x-1)yy' = x.$ Маємо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Після відокремлення змінних та інтегрування отримуємо:

$$ydy = \frac{x}{x-1}dx, \ \frac{y^2}{2} = x + \ln|x-1| + C.$$

Серед знайдених кривих знаходимо ту, що проходить через задану точку (2,2): $\frac{2^2}{2} = 2 + \ln|2-1| + C,$ звідки $C = 0$. Отже, рівняння шуканої кривої $\frac{y^2}{2} = x + \ln|x-1|$.

Приклад 6. *Знайти рівняння кривої, що проходить через точку (12,2) і має таку властивість: в довільній точці кривої N нормальний вектор $\overline{NM}$ з кінцем на осі OY має довжину 20 і утворює гострий кут з додатнім напрямом осі ординат.*

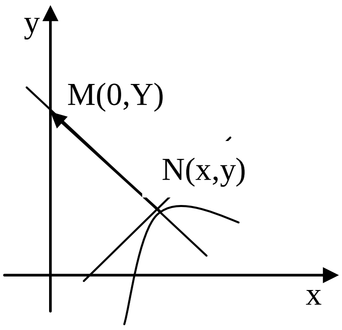

Рис.5

Нехай $N(x,y)$ довільна точка кривої, а $M(0,Y)$ – точка на нормалі (Рис.5).

Оскільки за умовою $\overline{NM}$ утворює гострий кут з додатнім напрямом OY, то $Y > y$. За умовою $|\overline{NM}| = \sqrt{x^2 + (Y-y)^2} = 20.$ Виражаємо звідси Y, враховуючи, що $Y - y > 0$:

$$x^2 + (Y-y)^2 = 400, \ Y - y = \sqrt{400 - x^2}, \ Y = y + \sqrt{400 - x^2}.$$

Тоді координата точки M(0, $y + \sqrt{400 - x^2}$). Підставляючи координати точки в рівняння нормалі, отримуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\sqrt{400 - x^2} = -\frac{1}{y'(x)}(0 - x), \text{ або } \sqrt{400 - x^2}\,y' = x.$$

Знаходимо його загальний розв'язок:

$$dy = \frac{xdx}{\sqrt{400 - x^2}}, \ y = -\sqrt{400 - x^2} + C.$$

Знаходимо C з умови, що крива має проходити через точку (12,2): $2 = -\sqrt{400 - 144} + C, C = 18$. Таким чином, наша лінія: $y = 18 - \sqrt{400 - x^2}$.

Задачи для самостійної роботи.

1. *Знайти рівняння кривої, що проходить через точку (1,2) і має властивість: ордината точки перетину дотичної з віссю ординат дорівнює натураьному логарифму абсциси точки дотику.* (Відповідь: $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, \;\; y = x + \ln x + 1.$)
2. *Знайти рівняння кривої, що проходить через точку (1,0), кутовий коефіцієнт довільної дотичної якої дорівнює відношенню суми абсциси і ординати точки дотику до абсциси точки дотику*. (Відповідь: $y' = \frac{x+y}{x}, y = x \ln x.$)
3. *Знайти рівняння кривих, для яких сума катетів трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис є стала величина рівна 5*. (Відповідь: $y' = \frac{y}{y-5}, y - 5\ln y = x + C.$)
4. *Знайти рівняння кривих, для яких відрізок будь-якої нормалі, розташований між осями координат, ділиться точкою дотику навпіл.* (Відповідь: $y'y = x, y^2 = x^2 + C.$)
5. *Знайти рівняння кривихї, для яких ордината точки перетину нормалі з віссю ординат дорівнює добутку квадрата абсциси і ординати точки дотику*. (Відповідь: $y'y(x^2-1) = x, y^2 = \ln|x^2-1| + C.$)

3.2 Задачі фізичного змісту

При складанні рівнянь, що описують деякі фізичні процеси, пов'язані з рухом матеріальної точки, слід пам'ятати, що швидкість є першою похідною, а прискорення другою похідною за часом від координати точки.

Приклад 1. *Написати рівняння руху, пройденого точкою за час* t *, якщо відомо, що швидкість точки в даний момент часу* t *пропорційна пройденому шляху. Відомо, що тіло за 1 хв проходить 30 м, а за 2 хв – 90 м.*

Нехай $x(t)$ – координата точки в момент часу t. Тоді $x'(t)$ - швидкість точки в даний момент часу. За умовою $x'(t) = kx(t), x(1) = 30, x(2) = 90.$ Маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$\frac{dx}{x} = k\,dt$, $\ln|x| = kt + \ln|C|$, $x = Ce^{kt}$.

Задовольняємо початкові умови, щоб знайти невідомі сталі C, k: $\begin{cases} 30 = Ce^{k}, \\ 90 = Ce^{2k} \end{cases}$. Звідси знаходимо $3 = e^{k}, k = \ln 3, C = 10.$ Отже, закон руху матеріальної точки має вигляд: $x(t) = 10e^{\ln 3 \cdot t}$, або $x(t) = 10 \cdot 3^{t}$.

Приклад 2.*Тіло масою m рухається прямолінійно і поступально. На тіло діє сила, пропорційна часу, що пройшов з того моменту, коли швидкість була* v_0 *(коефіцієнт пропорційності k). Крім того, на тіло діє сила опору середовища, що пропорційна добутку швидкості і часу (коефіцієнт пропорційності* k_1*). Знайти залежність швидкості від часу.*

Нехай $v(t)$ - швидкість тіла в момент часу t. За другим законом Ньютона $ma = F,$ де a - прискорення тіла, F - сила, що діє на тіло. У нашому випадку сила F - це рівнодіюча двох сил: $F_1 = kt$ і $F_2 = -k_1 vt$ (сила F_2 береться зі знаком мінус, оскільки діє в протилежному до руху напрямку). Оскільки прискорення $a = v'(t),$ із закона Ньютона отримуємо:

$$mv'(t) = kt - k_1 vt \text{ або } v'(t) + \frac{k_1 t}{m} v(t) = \frac{kt}{m}.$$

Маємо лінійне диференціальне рівняння. Його розв’язок шукаємо за методом Бернулі у вигляді: $v(t) = u(t)w(t).$ Тоді рівняння $u'w + u\left(w' + \frac{k_1 t}{m} w\right) = \frac{kt}{m}$ розпадається в систему двох рівнянь з відокремлюваними змінними для функцій $u(t)$ і $w(t)$:

$$\begin{cases} w' + \frac{k_1 t}{m} w = 0, \\ u'w = \frac{kt}{m}. \end{cases}.$$

Розв’язавши перше рівняння системи і поклавши $C=0$, знаходимо: $\frac{dw}{w}=-\frac{k_1 t}{m}dt$,

$\ln w=-\frac{k_1 t^2}{2m}$, $w=e^{-\frac{k_1 t^2}{2m}}$. Тоді з другого рвівняння маємо: $u'e^{-\frac{k_1 t^2}{2m}}=\frac{kt}{m}$, $u=\int\frac{kt}{m}e^{\frac{k_1 t^2}{2m}}dt$,

$u=e^{\frac{k_1 t^2}{2m}}\frac{k}{k_1}+C.$

Остаточно, залежність швидкості від часу має вигляд:

$$v(t)=u(t)w(t)=\left(e^{\frac{k_1 t^2}{2m}}\frac{k}{k_1}+C\right)e^{-\frac{k_1 t^2}{2m}}.$$

Приклад 3. *Температура нагрітого тіла за 10 хв змінилася від* 100° *до* 60° *C. Темература навколишнього середовища підтримується постійною і рівною* 10° *C. Визначити, через скільки хвилин температура тіла буде* 20° *C.*

Нехай $x(t)$ – температура тіла в деякий момент часу t. Як відомо, швидкість охолодження тіла пропорційна різниці між температурою тіла і температурою навколишнього середовища. Швидкість зміни температури є похідною від температури як функції часу. Отже, маємо диференціальне рівняння:

$$x'(t)=k(x(t)-10),$$

де k - коефіцієнт теплообміну. Крім того, з умови нам відомо $x(0)=100, x(10)=60.$ Шукаємо розв’язок диференціального рівняння, що задовольняє вказаним умовам. Маємо диференцільне рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\frac{dx}{dt}=k(x-10),\quad \frac{dx}{x-10}=kdt,\quad \ln|x-10|=kt+C.$$

Щоб знайти невідомі сталі, підставляємо знайдений загальний інтеграл в початкові умови задачі:

$$\begin{cases}\ln 90=C,\\ \ln 50=10k+C.\end{cases}$$

З цієї системи: $C=\ln 90, k=\dfrac{1}{10}\ln\dfrac{5}{9}$. Таким чином, температура тіла змінюється за законом: $\ln|x-10|=\dfrac{1}{10}\ln\dfrac{5}{9}t+\ln 90.$, $x=10^{\circ}+90^{\circ}\left(\frac{5}{9}t\right)^{0.1}$.

Приклад 4. *Знайти закон зміни струму в залежності від часу t, якщо активний опір R, коефіцієнт самоіндукції L, початкова сила струму* $I_0=0$, *електрорушійна сила змінюється за законом* $E=L_0\sin\omega t$.

За законом Кірхгофа сила струму $I(t)$ задовольняє рівняння:

$$L\frac{dI}{dt}+RI=E.$$

Отже, ми маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку:

$$L\frac{dI}{dt}+RI=L_0\sin\omega t,$$

де L, R, L_0, ω - сталі. Треба знайти розв'язок рівняння, що задовольняє початкову умову $I(0)=0$. За методом Бернулі шукаємо розв'язок у вигляді: $I(t)=u(t)v(t)$. Тоді рівняння набуває виду:

$$Lu'v+Luv'+Ruv=L_0\sin\omega t.$$

Для знаходження функцій $u(t)$ і $v(t)$ маємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} Lv'+Rv=0, \\ Lu'v=L_0\sin\omega t. \end{cases}$$

З першого рівняння маємо: $L\dfrac{dv}{dt}=-Rv,\ \dfrac{dv}{v}=-\dfrac{R}{L}dt,\ \ln v=-\dfrac{R}{L}t,\ v=e^{-\frac{R}{L}t}$.

Підставляємо знайдену функцію в друге рівняння і шукаємо його загальний розв'язок:

$Lu'e^{-\frac{R}{L}t}=L_0\sin\omega t,\ u=\dfrac{L_0}{L}\displaystyle\int\sin\omega t e^{\frac{R}{L}t}dt$. Проінтегрувавши інтеграл частинами двічі, отримаємо: $u=\dfrac{L_0{}^2\omega}{L^2\omega^2+R^2}(-e^{\frac{R}{L}t}\cos\omega t+\dfrac{R}{L\omega}e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t)+C.$

Таким чином, сила струму визначається за формулою:

$$I=uv=\frac{L_0{}^2\omega}{L^2\omega^2+R^2}(\frac{R}{L\omega}\sin\omega t-\cos\omega t)+Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Знаходимо сталу C з початкової умови $I(0)=0$:

$$I(0) = -\frac{L_0{}^2\omega}{L^2\omega^2 + R^2} + C = 0,\ \ C = \frac{L_0{}^2\omega}{L^2\omega^2 + R^2}.$$

Отже, остаточно

$$I = \frac{L_0{}^2\omega}{L^2\omega^2 + R^2}\left(\frac{R}{L\omega}\sin\omega t - \cos\omega t + e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Задачи для самостійної роботи.

1. *Матеріальна точка маси* m *рухається прямолінійно під дією сили. Вважаємо, що сила пропорційна часу, що пройшов з початку руху, і обернено пропорційна швидкості руху точки* v *(коефіцієнт пропорційності k). Знайти залежність між швидкістю руху* v *і часом* t*, якщо в момент часу* $t = 0$ *швидкість була* $v = v_0$. (Відповідь: $mv' = k\frac{t}{v}, v(0) = v_0.\ \ v^2 = \frac{k}{m}t^2 + v_0{}^2.$)
2. *Швидкість розпаду радія пропорційна його кількості* x. *Знайти залежність кількості* x *від часу* t*, якщо відомо, що через 1600 років залишиться половина кількості радія. Вважається, що початкова кількість радія становила* $x_0 = 2$ *(од).* (Відповідь: $x' = -kx, x(0) = 2, x(1600) = 1.\ \ x = 2e^{-\frac{\ln 2}{1600}t}.$)
3. *Знайти закон одновимірного руху матеріальної точки, що рухається під дією сили тяжіння, якщо в початковий момент часу* $t = t_0$ *точка знаходиться на висоті* $h = h_0$, *а початкова швидкість дорівнює* v_0 .(Відповідь: $mx'' = mg, x(0) = h_0, x'(0) = v_0.\ \ x(t) = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2.$)
4. *Якщо тіло поступово занурюється у рідину, то його щвидкість* v *і прискорення* a *наближено задовольняють рівняння* $a = b - kv$,, *де* b *і* $k -$ *сталі. Знайти залежність між глибиною занурення і часом. Вважаємо, що в момент часу* $t = 0$ *тіло нерухоме ізнаходиться на поверхні рідини*. (Відповідь: $x'' = b - kx', x(0) = 0, x'(0) = 0.\ \ x(t) = \frac{b}{k^2}(e^{-kt} - 1) + \frac{b}{k}t.$)

5. *Точка рухається по прямій з постійним прискоренням* a. *Знайти закон руху точки (залежність координати точки від часу), якщо в початковий момент швидкість була* v_0, *а початкова координата* x_0.

(Відповідь: $x'' = a, x(0) = x_0, x'(0) = v_0.$ $x(t) = \frac{a}{2}t^2 + x_0 t + x_0$.)

4. Екстремум функції двох змінних

4.1 Безумовний екстремум функцій двох змінних

Нехай функція $z = f(x,y)$ визначена в деякій області D і точка $M(x_0, y_0) \in D$. Точка $M(x_0, y_0)$ називається **точкою локального максимума** функції $z = f(x,y)$, якщо існує такий окіл точки $M(x_0, y_0)$, що для кожної точки (x,y) з цього околу, відмінної від точки $M(x_0, y_0)$, виконується нерівність $f(x,y) < f(x_0, y_0)$. Якщо ж $f(x,y) > f(x_0, y_0)$, то кажуть, що точка $M(x_0, y_0)$ є **точкою локального мінімума**. Значення функції в точці максимума (мінімума) називається максимумом (мінімумом) функції. Локальний максимум і мінімум функції називається її **локальними екстремумами**.

Умови існування екстремума функції дають наступні теореми.

Теорема 1 (необхідна умова існування екстремума в точці). Якщо в точці $M(x_0, y_0)$ диференційовна функція $z = f(x,y)$ має локальний екстремум, то її частинні похідні в цій точці рівні 0:

$$\begin{cases} f_x'(x_0, y_0) = 0, \\ f_y'(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Точки, в яких виконується (6) називаються **стаціонарними точками** функції $z = f(x,y)$. Стаціонарні точки і точки, в яких хоча б одна частинна похідна не існує називаються **критичними точками.** В критичних точках функція може мати екстремум, або не мати. Щоб перевірити, чи буде критична точка точкою екстремума, застосовують теорему 2.

Теорема 2 (достатня умова існування локального екстремума в точці). Нехай в стаціонарній точці (x_0, y_0) і в деякому її околі функція $z = f(x,y)$ має неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Обчислимо в точці (x_0, y_0) значення других похідних $f_{xx}''(x_0, y_0) = A,$ $f_{xy}''(x_0, y_0) = B,$ $f_{yy}''(x_0, y_0) = C.$ Позначимо через $\Delta = AC - B^2.$ Тоді

1. Якщо $\Delta > 0,$ то функція $z = f(x,y)$ в точці (x_0, y_0) має локальний екстремум, причому якщо $A < 0$, то максимум, якщо $A > 0$, то мінімум.

2. Якщо $\Delta < 0,$ то функція $z = f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) локального екстремума не має.

3. Якщо $\Delta = 0,$ то екстремум функції в точці (x_0, y_0) може бути, а може і не бути. В цьому випадку потрібні додаткові дослідження.

Приклад 1. Знайти локальний екстремум функції $z = x(36 - x - y^2).$

Знаходимо перші частинні похідні функції: $z_x' = 36 - 2x - y^2, \quad z_y' = -2xy$. Точок, в яких знайдені похідні не існують, немає**.** Шукаємо стаціонарні точки як розв'язок системи:

$$\begin{cases} 36 - 2x - y^2 = 0, \\ -2xy = 0. \end{cases}$$

Система має три розв'язки і, відповідно, маємо три стаціонарні точки: $M_1(0,6),$ $M_2(0,-6),\ M_3(18,0).$

Шукаємо другі частинні похідні нашої функції:

$z_{xx}'' = -2, \quad z_{xx}'' = -2y, \quad z_{yy}'' = -2x.$

Досліджуємо точку $M_1(0,6).$ Підставляючи її координати у вирази других похідних, знаходимо $A = -2,$ $B = -12,$ $C = 0.$ Тоді $\Delta = (-2)0 - (-12)^2 = -144 < 0.$ Отже, в цій точці екстремума немає.

Досліджуємо точку $M_2(0,-6).$ Для цієї точки $A = -2,$ $B = 12,$ $C = 0.$ Отже $\Delta = (-2)0 - 12^2 = -144 < 0$ і в цій точці екстремума теж нема.

Для точки $M_3(18,0):$ $A = -2,$ $B = 0,$ $C = -36,$ $\Delta = (-2)(-36) - 0^2 = 72 > 0.$ Таким чином, екстремум в точці є і оскільки $A < 0$, то це локальний максимум: $z_{\max}(18,0) = 18(36 - 18 - 0) = 324.$

Задачи для самостійної роботи.

Знайти локальні екстремуми функції двох змінних:

1. $z = x^3 + y^3 - 3xy.$ (Відповідь: $z_{\min}(1,1) = -1$).

2. $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y).$ (Відповідь: $z_{\min}(\frac{1}{2},-1) = -\frac{e}{2}$).

3. $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$. (Відповідь: $z_{\max}(2,-2) = 8$).

4. $z = 3x^2 y - x^3 - y^4$. (Відповідь: $z_{\max}(6,3) = 27$).

5. $z = \dfrac{1+x+y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$. (Відповідь: $z_{\max}(1,-1) = \sqrt{3}$).

4.2 Найбільше і найменше значення функції двох змінних в замкнутій області

Вважаємо, що функція $z = f(x,y)$ визначена і неперервна в обмеженій замкнутій області D. Тоді вона досягає в деяких точках області свого найбільшого M і найменшого m значень. Ці значення досягаються або у внутрішіх точках області, або в точках, що лежать на границі області.

Щоб знайти найбільше і найменше значення функції в області D потрібно:

1. знайти всі критичні точки функції, які належать області D, і обчислити значення функції в цих точках.
2. знайти найбільше і найменше значення функції на границях області.
3. порівняти усі знайдені значення функції і вибрати серед них найбільше M і найменше m.

Приклад 2. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = xy$ в замкненій області , обмеженій лініями $x + y = 1, x = 0, y = 0.$

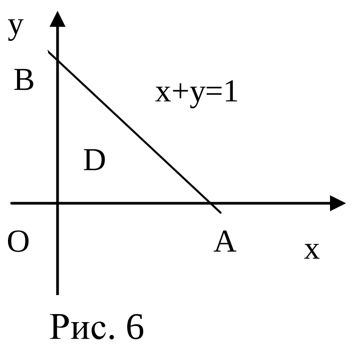

Рис. 6

Область D - трикутник OAB, зображений на Рис. 6.

1. Шукаємо стаціонарні точки $z_x' = y, \quad z_y' = x.$ Система $\begin{cases} y = 0, \\ x = 0 \end{cases}$ має єдиний розв'язок O(0,0). Ця точка належить області D і $z(0,0) = 0.$

2. Досліджуємо функцію на границі області, яка складається з трьох відрізків OA, AB, OB.

На OA $y = 0$, а тоді відповідно і $z = 0$.На OB $x = 0$, і, відповідно, $z = 0$.

На $AB: y = 1 - x.$ Тоді підставляємо знайдене значення у вираз функції $z = xy$ замість $y: z = x(1-x),\quad x \in [0,1]$ і шукаємо найбільше і найменше значення отриманої функції як функції однієї змінної $x, x \in [0,1]$:

$$z_x' = 1 - 2x,\ 1 - 2x, = 0,\ x = \frac{1}{2} \in [0,1].$$

Порівнюємо значення функції в трьох точках $z(0) = 0,\ z(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4},\ z(1) = 0.$

3. Серед отриманих значень обираємо найбільше $M = \frac{1}{4},$ яке досягається у внутрішній точці області $x = \frac{1}{2}, y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$ і найменше $m = 0,$ яке досягається при $x = 0, y \in [0,1]$ і $y = 0, x \in [0,1].$

Приклад 3. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = (4 - x^2)y$ в замкненій області D, обмеженій лініями $y = x^2, y = 3.$

Область D зображена на Рис 7.

1. Шукаємо стаціонарні точки $z_x' = -2xy,\ z_y' = 4 - x^2.$ Система $\begin{cases} -2xy = 0, \\ 4 - x^2 = 0 \end{cases}$ має два розв'язки і ми, відповідно, отримуємо дві стаціонарні точки: точку $M_1(2,0),$ яка належить області D, і точку $M_2(-2,0),$ яка не належить області D. Знаходимо значення функції в точці $M_1(2,0)$: $z(2,0) = 0.$

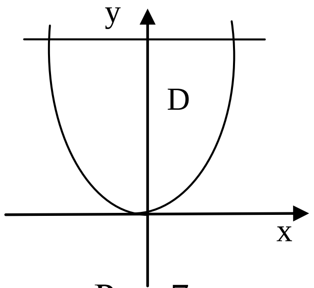

Рис. 7

2. Досліджуємо функцію на границі області, яка складається з двох ліній: з дуги параболи $y = x^2, x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ і відрізка $y = 3, x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

На дузі параболи функція набуває виду $z = (4 - x^2)x^2,$ $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}].$ Знаходимо найбільше і найменше значення отриманої функції як функції однієї змінної на $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$:

$$z_x' = 8x - 4x^3,\ 8x - 4x^3 = 0.$$

Рівняння має три розв'язки: $x_1 = 0 \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}],\ z(0) = 0.$

$x_2 = \sqrt{2} \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}],\ z(\sqrt{2}) = 4.$

$x_3 = -\sqrt{2} \in \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$, $z(-\sqrt{2}) = 4.$

Знаходимо значення функції на кінцях відрізку: $z(\sqrt{3}) = 3,\ z(-\sqrt{3}) = 3.$

Досліджуємо функцію на відрізку $y = 3,\ x \in \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right].$ Тоді функція набуває вигляду $z = 3(4 - x^2).$ Проводячи дослідження аналогічні попередньому, маємо

$z_x' = -6x,\ -6x = 0,\ x = 0 \in \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right],\ z(0) = 12.\ z(\sqrt{3}) = 3,\ z(-\sqrt{3}) = 3.$

3. З усіх отриманих значень вибираємо найбільше і найменше:
$M = z(0,3) = 12,\ m = z(2,0) = z(0,0) = 0.$

Приклад 4. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = y^4 - x^4$ в замкненій області D, обмеженій лінією $x^2 + y^2 = 9.$

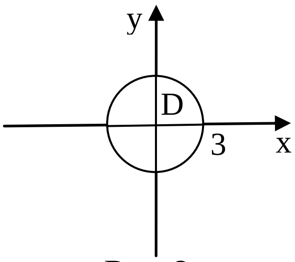

Рис 8.

Область D зображена на Рис 8.

Шукаємо стаціонарні точки $z_x' = -4x^3,\ z_y' = 4y^3.$

Єдину стаціонарну точку $M(0,0)$ знаходимо як розв’язок системи: $\begin{cases} -4x^3 = 0, \\ 4y^3 = 0. \end{cases}$

Перевіряємо, що точка належить області і знаходимо значення функції в цій точці: $z(0,0) = 0.$

1. Досліджуємо поведінку функції на границі області $x^2 + y^2 = 9.$ Записуємо парамеричне рівняння кола: $x = 3\cos t, y = 3\sin t, t \in [0,2\pi].$ Підставляючи значення x і y в функцію $z(x,y)$, отримаємо вираз z як функції змінної t: $z(t) = (3\sin t)^4 - (3\cos t)^4.$

Після перетворень, будемо мати: $z(t) = ((3\sin t)^2 - (3\cos t)^2)((3\sin t)^2 + (3\cos t)^2) = -81\cos 2t,\ \ t \in [0,2\pi].$

Шукаємо стаціонарні точки: $z'(t) = 162\sin 2t, = 0$. Знаходимо розв’язки рівняння, які належать $[0,2\pi]$: $t = \dfrac{\pi k}{2}, k = \{0,1,2,3,4\}.$ Знаходимо значення функції в знайдених точках і на кінцях інтервалу: $z(0) = z(\pi) = z(2\pi) = -81,\ z(\dfrac{\pi}{2}) = z(\dfrac{3\pi}{2}) = 81.$

Параметру $t=\frac{\pi}{2}$ відповідає точка $(0,3)$, параметру $t=\frac{3\pi}{2}$ - точка $(0,-3)$, параметру $t=\pi$ - точка $(-3,0)$, параметрам $t=0,\ t=2\pi$ - точка $(3,0)$.

2. З трьох отриманих значень вибираємо найбільше і найменше: $M=z(0,3)=z(0,-3)=81,\ \ m=z(3,0)=z(-3,0)=-81.$

Приклади для самостійної роботи.

Знайти найбільше і найменше значення функції в замкненій області D, *обмеженій лініями*:

1. $z=x^2-y^2,\ D: 2x-y-3=0, x=1, y=0.$ (Відповідь: $M=z(\frac{3}{2},0)=\frac{9}{4},$ $m=z(1,-1)=0.$)

2. $z=5-4xy,\ \ D: x^2+y^2=1.$ (Відповідь: $M=z(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=z(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})=7$, $m=z(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})=z(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})=3$).

3. $z=2x^2y+y^3,\ \ D: x^2=y+1, x+y=1.$ (Відповідь: $M=z(-2,3)=51,$ $m=z(0,-1)=-1.$)

4. $z=x^2y+xy^2+xy,\ \ D: y=\frac{1}{x}, x=1, x=2, y=-1.5$. (Відповідь: $M=z(2,1/2)=3.5,\ m=z(2,-3/2)=-4.5$)

5. $z=x^2-2y+3,\ \ \ D: y-x=1, x=0, y=0.$ (Відповідь: $M=z(-1,0)=z(1,0)=4,$ $m=z(0,1)=1.$)

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1.Владіміров В.М., Пучков О.А., Шмигевський М.В. Збірник завдань з вищої математики. Ч.2.-Київ: Політехніка, 2002.-108 с.

2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник.-Київ: А.С.К.-2005.- 648с.ISBN 966-539-320-0

3. Пискунов Н.С.Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.2.- М .Наука, 1970.-576 с.

4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс (9-е изд.). М:Высшее образование .- 2009.-606 с.

5. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения. Практический курс. Учебное пособие.-М. :Высшая школа.-2006.-383 с.